第22講　平面上のベクトル

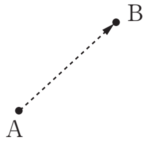
§1 ▶ ベクトル

要点整理 と 公式

要点 1 有向線分とベクトル

長さや重さといった「量」は，単位を定めることで，5cm や 10kg のように 1 つの数値を用いてその「大きさ」を表すことができる。ここでは「移動」を伴う量について扱う。

平面上の A にあった点が，同じ平面上の B まで移動するとき，この「移動」を表すには，AB の間の「距離」だけでは不可能で，どの「向き」に移動したかということも必要となる。



このように，移動の向きに矢印がついた線分を「有向線分」という。

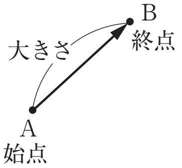
有向線分 AB において，

点 A を「　　　」，点 B を「　　　」

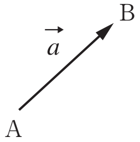
という。また，線分 AB の長さを，

有向線分 AB の「　　　」(または長さ)

という。



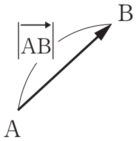
この有向線分を使って移動を表すとき，その向きと大きさが同じ有向線分は，同じ移動を表す。有向線分の位置を問わず，向きと大きさだけを考えたものを「　　　　」という。



有向線分 AB が表すベクトルを「　　　」と書く。または簡単に「 $\vec{a}$ 」のように表すこともできる。

$\overrightarrow{AB}$ の大きさを，絶対値記号を用いて「　　　」と表す。

$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ は，有向線分 AB の長さである。



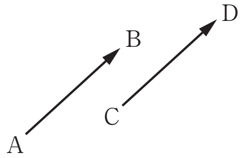
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点 2 ベクトルの相等と逆ベクトル

例えば，右図の有向線分 AB と有向線分 CD が向きが同じで大きさが等しいとき，この 2 つの有向線分はベクトルとしては同じものと考える。

2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じで大きさが等しいとき，2 つのベクトルは「等しい」といい，「$\vec{a}=\vec{b}$」と表す。

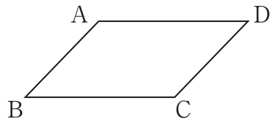
右の図において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき，有向線分 AB を平行移動すると有向線分 CD と重ね合わせることができる。



（ex）平行四辺形 ABCD において，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\phantom{\mathrm{CD}}}$ ，　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\phantom{\mathrm{CB}}}$

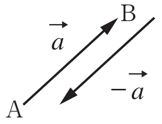
である。



また，ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが逆のベクトルを，$\vec{a}$ の「逆ベクトル」といい，マイナスの符号をつけて「　　　」と表す。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\vec{a}$ である。

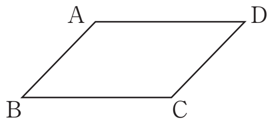
また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ である。



（ex）平行四辺形 ABCD において，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$ 　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=$ 　$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

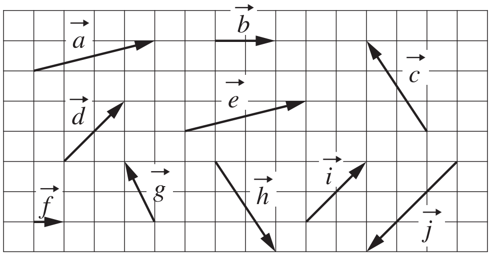
1

右の図において，次のようなベクトルの組を答えよ。

(1)　等しいベクトル

(2)　互いに逆ベクトル

(3)　向きが同じベクトル



Point Pickup

ベクトルの相等と逆ベクトル

2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が

・向きと大きさが一致　$\Longleftrightarrow$　$\vec{a}=\vec{b}$

・大きさが同じく向きが逆　$\Longleftrightarrow$　$\vec{a}=-\vec{b}$, $\vec{b}=-\vec{a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

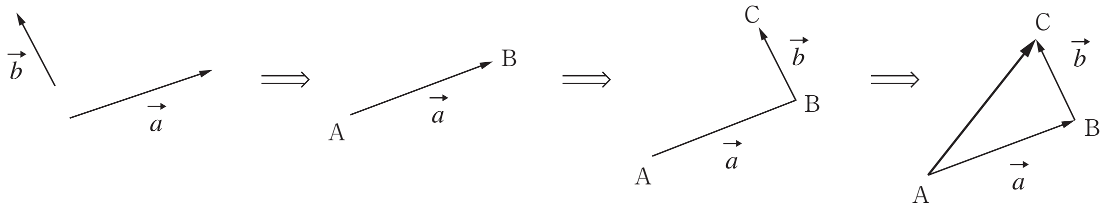
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ ベクトルの加法・減法

要点整理 と 公式

要点③ ベクトルの加法

2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，まず1点Aを定め，点Aを始点とし $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ となる終点Bをとり，さらに点Bを始点として $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ となる終点Cをとる。



このとき，$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「和」といい，「$\vec{a}+\vec{b}$」と表す。つまり，

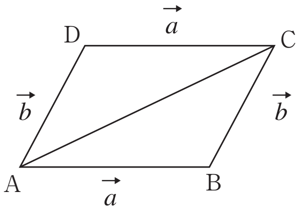
$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

である。

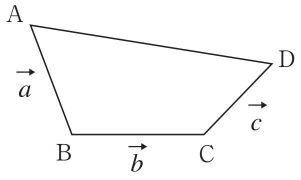
ベクトルの加法について，次の性質が成り立つ。

■ ベクトルの加法の性質

交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　　結合法則　$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$



平行四辺形 ABCD

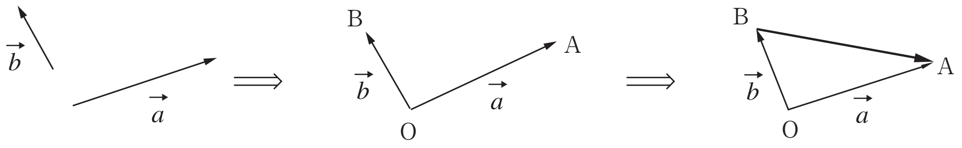


結合法則が成り立つことにより，3つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の和を単に $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書く。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点4 ベクトルの減法

2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，1点Oを定め，点Oを始点として $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ となる終点A，点Oを始点として $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ となる終点Bをとる。



このとき，ベクトル $\overrightarrow{BA}$ を $\vec{a}$ から $\vec{b}$ を引いた「差」といい，「$\vec{a}-\vec{b}$」と表す。つまり，

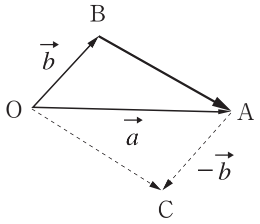
$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$

である。

また，右図において，$\overrightarrow{AC}=-\vec{b}$ となる点Cをとると，

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+(-\vec{b})$$



であり，また四角形OBACは平行四辺形となることから

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}$$

である。よって，次の等式が成り立つ。

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

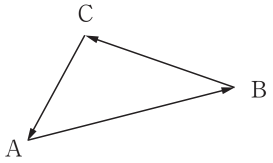
要点5 零ベクトル

始点と終点が一致したベクトル，すなわち「大きさが0」のベクトルを「零(れい)ベクトル」(またはゼロベクトル)といい，「　　」と表す。零ベクトルの向きは考えない。例えば $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ である。

零ベクトルについて，次のことが成り立つ。

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0} \qquad \vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$

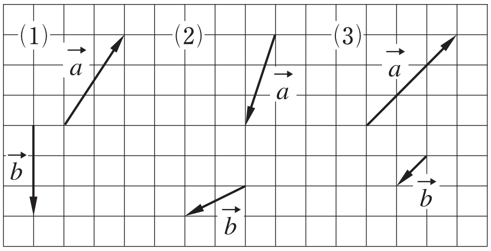
(ex)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{\quad\quad}+\overrightarrow{CA}$



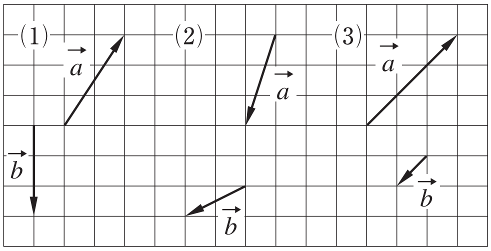
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］　次の (1)～(3) のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ を図示せよ。



［2］　次の (1)～(3) のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。



Point Pickup

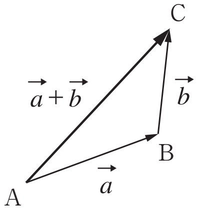
ベクトルの和

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和 $\vec{a}+\vec{b}$ は，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とすると

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$$

である。

一方のベクトルの終点と，もう一方のベクトルの始点を合わせる。



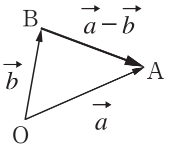
ベクトルの差

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差 $\vec{a}-\vec{b}$ は，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$$

である。

2 つのベクトルの始点を合わせる。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ベクトルの実数倍と計算

要点整理 と 公式

要点6 ベクトルの実数倍

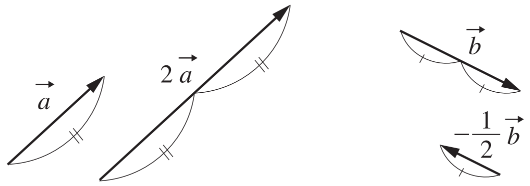
$\vec{0}$ でない $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}$ の実数倍「$k\vec{a}$」を次のように定義する。

［1］ $k>0$ のとき　$k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

［2］ $k<0$ のとき　$k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $-k$ 倍のベクトル

［3］ $k=0$ のとき　$k\vec{a}=\vec{0}$

（ex）



※$(-k)\vec{a}=-(k\vec{a})$ より，かっこを省略して $-k\vec{a}$ とかく。

また，$k\vec{0}=\vec{0}$ である。

要点7 ベクトルの計算

ベクトルの実数倍については，次の性質が成り立つ。

■ ベクトルの実数倍の性質

k，l を実数とする。

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}=kl\vec{a}$　　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

ベクトルの加法・減法・実数倍の計算は，これまで学んだ性質により，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を文字 a，b と同じように扱って計算することができる。

（ex）$2\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)+5\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$

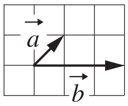
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

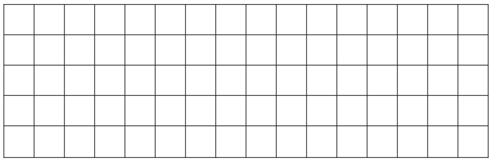
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］ 右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを下の図に図示せよ。



(1) $2\vec{a}$　　(2) $-\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　(3) $3\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$



［2］ 次の計算をせよ。

(1) $4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}$　　(2) $\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}$　　(3) $3\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)-2\left(\vec{a}-6\vec{b}\right)$

Point Pickup

ベクトルの実数倍

$\vec{a}$ の実数倍 $k\vec{a}$ について

向　き	$k>0$ … $\vec{a}$ と同じ	$k<0$ … $\vec{a}$ と反対
大きさ	$k>0$ … k 倍	$k<0$ … $-k$ 倍

ベクトルの計算

その性質から，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を，文字 a，b と同じように計算することができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

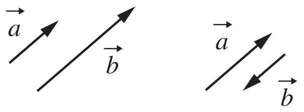
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ ベクトルの平行，ベクトルの分解

要点整理 と 公式

要点8 ベクトルの平行

$\vec{0}$ ではない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きが同じ，または向きが反対であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「 平行 」であるといい，「$\vec{a}$　　$\vec{b}$」とかく。

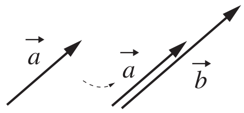


ベクトルの実数倍の定義から，次のことが成り立つ。

■ **ベクトルの平行**

$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$\vec{a} /\!/ \vec{b}$　$\Longleftrightarrow$　$\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在する。



大きさが 1 のベクトルを「　　　　　　　」という。

（ex）$|\vec{a}| = 3$　のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは　　$\vec{a}$ と　　　$\vec{a}$

要点9 ベクトルの分解

一般に平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

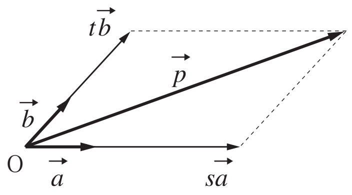
■ **ベクトルの分解**

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。

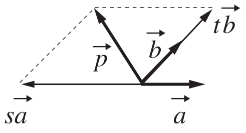
このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

の形でただ 1 通りに表すことができる。



$s > 0$，　$t > 0$



$s < 0$，　$t > 0$

※ $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$　かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は「 1 次独立」であるという。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛メモ｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

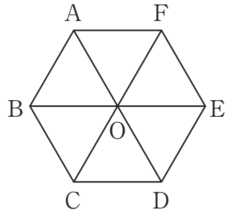
4

正六角形ABCDEFにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$とし，

対角線BEと対角線FCの交点をOとする。次のベクトルを

$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{FC}$　　(2)　$\overrightarrow{AO}$　　(3)　$\overrightarrow{BF}$



Point Pickup

ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{p}\iff\vec{p}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

これにより，与えられたベクトル $\vec{a}$ と平行なベクトル $\vec{p}$ を，$\vec{a}$ を用いて表すことができる。

ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき（$\vec{a}$，$\vec{b}$ が1次独立であるとき）

任意のベクトル $\vec{p}$ は　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　の形で

ただ1通りに表すことができる。

ただし s，t の値は，図形を見るだけでは求められない場合もある。

よって，2つのベクトルの

和　$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$　や　差　$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

を用いて，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

のようにベクトルを「分割」するとよい。

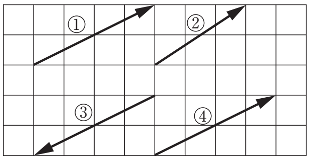
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　確認テスト

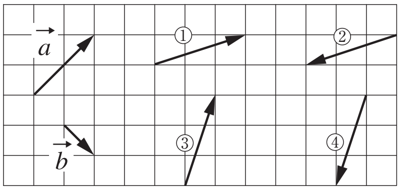
1　右の図で，ベクトル①と次の関係にあるベクトルを数字で答えよ。



(1)　等しいベクトル　[ア]

(2)　逆ベクトル　[イ]

2　右の図で，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すベクトルは [ウ]，$\vec{a}-\vec{b}$ を表すベクトルは [エ] である。[ウ]，[エ] に当てはまるものを①～④から選び，数字で答えよ。

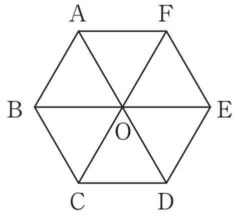


3　次の計算をせよ。

(1)　$\vec{a}-3\vec{a}+5\vec{a}=$ [オ] $\vec{a}$

(2)　$2(\vec{a}+3\vec{b})-(3\vec{a}+4\vec{b})=$ [カ] $\vec{a}+$ [キ] $\vec{b}$

4　正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。



(1)　$\overrightarrow{EB}=$ [クケ] $\vec{b}$ である

(2)　$\overrightarrow{AO}=$ [コ]，$\overrightarrow{FB}=$ [サ] である。[コ]，[サ] に当てはまるものを，下の①～④から選び，数字で答えよ。

①　$\vec{a}+\vec{b}$　　②　$\vec{a}-\vec{b}$　　③　$-\vec{a}+\vec{b}$　　④　$-\vec{a}-\vec{b}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　平面上のベクトル

1

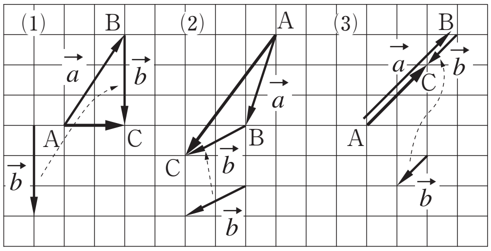
(1)　$\vec{a}$ と $\vec{e}$, $\vec{d}$ と $\vec{i}$

(2)　$\vec{c}$ と $\vec{h}$

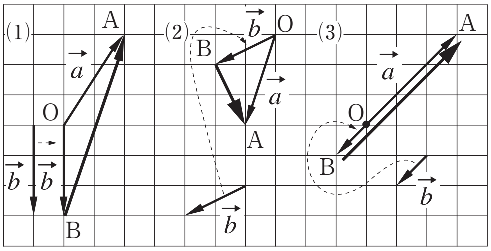
(3)　$\vec{a}$ と $\vec{e}$, $\vec{d}$ と $\vec{i}$, $\vec{b}$ と $\vec{f}$

2

［1］　(1)～(3) のそれぞれについて，図の $\overrightarrow{AC}$ が求める $\vec{a}+\vec{b}$

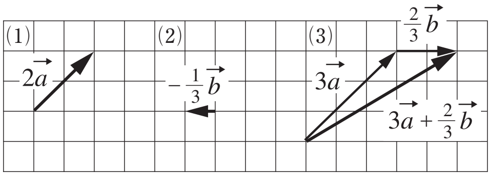


［2］　(1)～(3) のそれぞれについて，図の $\overrightarrow{BA}$ が求める $\vec{a}-\vec{b}$



3

［1］



［2］　(1)　$4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}=(4+3-5)\vec{a}=2\vec{a}$

(2)　$\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}=(1-3)\vec{a}+(-2-1)\vec{b}=-2\vec{a}-3\vec{b}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$3(\vec{a}-4\vec{b})-2(\vec{a}-6\vec{b})=3\vec{a}-12\vec{b}-2\vec{a}+12\vec{b}=\vec{a}$

4

(1)　$\overrightarrow{FC}=2\vec{a}$

(2)　$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$

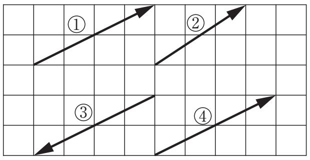
(3)　$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\vec{a}+\vec{b}$

（別解）　$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　確認テスト

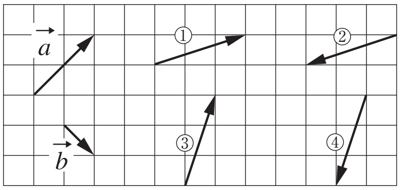
1　右の図で，ベクトル①と次の関係にあるベクトルを数字で答えよ。



(1)　等しいベクトル　[ア]

(2)　逆ベクトル　[イ]

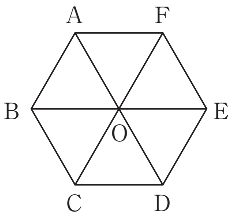
2　右の図で，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すベクトルは [ウ]，$\vec{a}-\vec{b}$ を表すベクトルは [エ] である。[ウ]，[エ] に当てはまるものを①～④から選び，数字で答えよ。



3　次の計算をせよ。

(1)　$\vec{a}-3\vec{a}+5\vec{a}=$ [オ] $\vec{a}$　　(2)　$2(\vec{a}+3\vec{b})-(3\vec{a}+4\vec{b})=$ [カ] $\vec{a}+$ [キ] $\vec{b}$

4　正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。



(1)　$\overrightarrow{EB}=$ [クケ] $\vec{b}$である

(2)　$\overrightarrow{AO}=$ [コ]，$\overrightarrow{FB}=$ [サ] である。[コ]，[サ] に当てはまるものを，下の①～④から選び，数字で答えよ。

①　$\vec{a}+\vec{b}$　　②　$\vec{a}-\vec{b}$　　③　$-\vec{a}+\vec{b}$　　④　$-\vec{a}-\vec{b}$

｛解答｝

1　(1)　ア　④　　(2)　イ　③

2　ウ　①　　エ　③

3　(1)　オ　3　　(2)　カ　−　　キ　2

4　(1)　ク　−　　ケ　2　　(2)　コ　①　　サ　②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。